Groupe B

MATHÉMATIQUES

SESSION DE 1991

DURÉE : 4 heures

Notations et conventions

Pour tout réel x on note $[x]$ l'unique entier tel que $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

On note φ la fonction de période 2π, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ si $x \in [0, 2\pi[$.

Si x est un réel strictement positif, on note $\log(x)$ le logarithme népérien de x.

On dit qu'un réel x est multiple de 2π s'il est de la forme $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On convient qu'une somme sur un ensemble d'indices vide est égale à zéro.

PARTIE I

1. Soient $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Montrer que pour tous les entiers naturels p et q vérifiant $p < q$ on a :

$$\sum_{k=p}^{q} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=p}^{q-1} s_{p,k}(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_{p,q}\beta_q, \qquad \text{avec} \qquad s_{p,k} = \sum_{j=p}^{k} \alpha_j .$$

2. *a.* Montrer, en utilisant I.1., que pour tout réel ε vérifiant $0 < \varepsilon < \pi$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.

b. Montrer l'existence d'un réel M tel que, pour tout réel x, pour tout entier naturel non nul N, on ait :

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant M .$$

Indication : Pour x non nul, poser $p = \left[\frac{\pi}{x} \right]$, et quand $N > p$ traiter de façon différente la somme sur les $k \leqslant p$ et celle sur les $k > p$.

3. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série convergente de réels. Pour $r \in]-1, 1[$, on note $f(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$. Montrer que $\lim_{\substack{r\to 1 \\ r<1}} f(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. On pourra utiliser I.1. pour estimer $\sum_{k=p}^{q} a_k(1 - r^k)$.

4. Déduire des questions précédentes que pour tout réel x non multiple de 2π, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k} .$$

A SUIVRE

Partie II

Pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de période 2π continue par morceaux, on note, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)\, e^{-int} \mathrm{d}t$.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de période 2π, C^1 par morceaux et continue.

   a. Montrer que $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $\delta \in]0, 2\pi[$, tel que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

   $$\int_0^{\delta} |g'(t+x)|\, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} |g'(t+x)|\, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon .$$

   b. Déduire des résultats de la première partie et de la question précédente la convergence uniforme de la série de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g)\, e^{int}$ vers g sur $\mathbb{R}$. On pourra intégrer par parties $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, g'(t+x)\, \mathrm{d}t$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de période 2π continue par morceaux et C^1 par morceaux. Déduire de II.1. que la série de Fourier de g converge pour tout réel x et a pour somme $\frac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-))$, et que la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé ne contenant aucun point de discontinuité de g. (Par convention $g(x^+)$ (resp. $g(x^-)$) est la limite quand $t \to x, t > x$ (resp. $t \to x, t < x$) de $g(t)$.) On pourra introduire une fonction h de la forme $h(x) = g(x) - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi(x - x_k)$.

Partie III

Soient a et b des réels vérifiant $a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est C^2, et que f' est monotone et ne s'annule pas. On note $m = \inf_{t \in [a,b]} |f'(t)|$. Montrer que :

   $$\left| \int_a^b e^{if(t)}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{4}{m}.$$

   Indication : On pourra intégrer par parties.

2. On suppose que f est C^2 et que f'' ne s'annule pas. On note $r = \inf_{t \in [a,b]} |f''(t)|$. Montrer que :

   $$\left| \int_a^b e^{if(t)}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{r}}.$$

   Indication : Si f' s'annule en un point c de $]a, b[$, on pourra écrire :

   $$[a, b] = [a, c - \delta] \cup [c - \delta, c + \delta] \cup [c + \delta, b],$$

   utiliser III.1., puis choisir judicieusement δ.

Tournez la page S.V.P.

3. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction C^1. Montrer que :

$$\sum_{\substack{a < 2\pi n \leqslant b \\ n \in \mathbb{Z}}} g(2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b g(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_a^b \varphi(x)\,g'(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\left(\varphi(b)\,g(b) - \varphi(a)\,g(a)\right).$$

4. Soit ε un réel vérifiant $0 < \varepsilon < 1$. Montrer qu'il existe des réels A et B_ε tels que, pour tout $\beta > 0$, on ait :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta}{k(k+\beta)} \leqslant A \log(\beta + 2)$$

$$\sum_{\substack{k \geqslant \beta + \varepsilon \\ k \in \mathbb{Z}}} \frac{\beta}{k(k-\beta)} \leqslant B_\varepsilon \log(\beta + 2).$$

5. On veut démontrer le résultat suivant : étant donné $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe une constante C_ε, indépendante de a, b et f, telle que, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est C^2, et f' est monotone, alors, si on note :

$$\alpha = \inf_{t \in [a,b]} f'(t) \qquad \text{et} \qquad \beta = \sup_{t \in [a,b]} f'(t),$$

on a :

$$\left| \sum_{\substack{a < 2\pi n \leqslant b \\ n \in \mathbb{Z}}} e^{if(2\pi n)} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\alpha - \varepsilon < k < \beta + \varepsilon \\ k \in \mathbb{Z}}} \int_a^b e^{i(f(t) - kt)}\,dt \right| \leqslant C_\varepsilon \log((\beta - \alpha) + 2).$$

a. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $-1 \leqslant \alpha - \varepsilon < 0$ et f' est décroissante. On supposera dans les questions III.5.*b.* et III.5.*c.* que ces conditions sont vérifiées.

b. Montrer qu'il existe une constante D_ε telle que :

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\,(e^{if(x)})'\,dx + \sum_{\substack{1 \leqslant k < \beta + \varepsilon \\ k \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{2k} \int_a^b e^{i(f(x) - kx)}\,f'(x)\,dx \right| \leqslant D_\varepsilon \log(\beta + 2).$$

Indication : Utiliser I.2., I.4. et III.4.

c. Montrer l'énoncé recherché en utilisant III.3 et III.5.*b.*

6. Déduire de III.2. et III.5. l'énoncé suivant : il existe une constante C_1, indépendante de a, b, λ, h et f, telle que, quels que soient a et b avec $b \geqslant a + 1$, λ et h réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $0 < \lambda \leqslant f'' \leqslant h\lambda$, on ait :

$$\left| \sum_{\substack{a < n \leqslant b \\ n \in \mathbb{Z}}} e^{if(n)} \right| \leqslant C_1 \left(h(b - a)\lambda^{\frac{1}{2}} + \lambda^{-\frac{1}{2}}\right).$$

A SUIVRE

Partie IV

On fixe $J > 1$. On pose $\Phi(t) = \frac{1}{2} J \int_{-\frac{1}{J}}^{+\frac{1}{J}} \varphi(t+u)\,du$, et $\psi(t) = |\Phi(t) - \varphi(t)|$.

1. Calculer les développements en série de Fourier de Φ et ψ. Montrer qu'ils convergent absolument, et qu'ils convergent uniformément vers Φ et ψ sur $\mathbb{R}$.

2. On écrit $\Phi(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \sin(jt)$ et $\psi(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \cos(jt)$. Montrer qu'il existe une constante A telle que, quel que soit $j \geqslant 1$,

$$|a_j| + |b_j| \leqslant \frac{A}{j^2} \inf(j, J).$$

3. Démontrer l'énoncé : il existe une constante C_2 telle que, sous les hypothèses de III.6., on ait :

$$\left| \sum_{\substack{a < n \leqslant b \\ n \in Z}} \varphi(f(n)) \right| \leqslant C_2 (h(b-a)\lambda^{\frac{1}{3}} + \lambda^{-\frac{1}{2}}).$$

Indication : Traiter différemment les cas $\lambda \geqslant 1$ et $\lambda < 1$. Quand $\lambda < 1$, on pourra, après avoir remarqué que :

$$\left| \sum_{a < n \leqslant b} \varphi(f(n)) \right| \leqslant \left| \sum_{a < n \leqslant b} \Phi(f(n)) \right| + \sum_{a < n \leqslant b} \psi(f(n)),$$

développer en série de Fourier, utiliser IV.2. et III.6., puis choisir J judicieusement.

Partie V

Pour $x \geqslant 1$, on pose $\theta(x) = \sum_{\substack{0 < k \leqslant \sqrt{x} \\ k \in Z}} \varphi\left(\frac{x}{k}\right)$.

Montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \geqslant 2$, $|\theta(x)| \leqslant C x^{\frac{1}{3}} \log x$.

Indication : On pourra utiliser IV.3. et voir $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{x}\right]$ comme réunion des intervalles $[2^r, 2^{r+1}[$, $r = -1, \ldots, r_0 - 1$, et $[2^{r_0}, \sqrt{x}]$ avec $r_0 = \left[\frac{\log \sqrt{x}}{\log 2}\right]$

FIN